Т е о р е м а 3. Вершины A_1 и A_2 являются фокальными точками коники C_0. Остальные четыре фокуса коники C_0 совпадают с точками пересечения этой коники с прямыми F_1A_2 и F_2A_3.

Т е о р е м а 4. Поверхности $(A_0), (A_1), (A_2)$ являются одной и той же инвариантной квадрикой, содержащей однопараметрическое семейство (C) коник C и определяемой уравнением

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 + \frac{2}{b}x^0x^3 = 0$$

Т е о р е м а 5. Плоскости коник C образуют пучок.

С л е д с т в и е. Таким образом, однопараметрическое семейство (C) коник C образовано сечениями инвариантной квадрики пучком плоскостей.

Т е о р е м а 6. Характеристическое многообразие квадрики Q, описывающей конгруэнцию (Q), содержит прямую A_1A_2, характеристику плоскости коники C и конику, лежащую в плоскости $(A_0F_2A_3)$.

С л е д с т в и е. Вершины A_1 и A_2, а также точки пересечения коники C с характеристикой ее плоскости являются фокальными точками квадрики Q.

Оставшиеся четыре фокальные точки квадрики Q определяются системой уравнений

$$x^1 + x^2 = 0, \quad (x^0)^2 + (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0,$$

$$\lambda(x^1)^2 - b^3x^0x^1 - b\lambda x^0x^3 + (b^2-1)x^1x^3 = 0$$

и геометрически не охарактеризованы.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1973. Вып.3. С.41–49.

УДК 514.75

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ НУЛЕВОГО КРУЧЕНИЯ

П.А.Т а д е е в
(Киевский университет)

Г.Ф.Лаптев в работе [1] для гиперповерхности в пространстве проективной связности с кривизной и кручением построил геометрические объекты, в частности, тензоры и инварианты, обобщающие основные понятия проективно дифференциальной геометрии обычной гиперповерхности. При этом он указал только один из возможных способов их построения.

В настоящей работе для гиперповерхности в пространстве проективной связности без кручения приводится "расщепление" [2] геометрических объектов, обобщающих основные понятия проективно дифференциальной геометрии гиперповерхности. При этом мы ограничиваемся указанием только некоторых из возможных расщеплений. В качестве примера для поверхности в трехмерном пространстве проективной связности приведены геометрические интерпретации двух, из построенных ниже аналитическим путем, нормалей Фубини [3].

На протяжении всей работы будем пользоваться объектами, которые были построены Г.Ф.Лаптевым при исследовании гиперповерхности проективного пространства [4] и пространства проективной связности [1], а также результатами работы [5] А.Швеца, не ссылаясь каждый раз на это. Обозначения и терминология совпадают с принятыми в упомянутых выше работах.

1. Рассмотрим пространство проективной связности без кручения $P_{N,N}$ с N-мерной базой и N-мерными слоями P_N, определяемое формами $\omega_J^{\mathcal{J}}$, которые подчинены следующим структурным уравнениям:

$$D\omega_J^{\mathcal{J}} = [\omega_J^K\omega_K^{\mathcal{J}}] + R^{\mathcal{J}}_{Jpq}[\omega^p\omega^q] \quad (J, \mathcal{J}, K = \overline{0,N};\ p,q = \overline{1,N}),$$

$$R^{\mathcal{J}}_{Jpq} = -R^{\mathcal{J}}_{Jqp}, \quad R^{\mathcal{J}}_{0pq} = 0, \quad \omega^J_{\mathcal{J}} = 0.$$

При этом 1-формы $\omega_J^{\mathcal{J}}$ определяют главную линейную часть определяющего проективную связность отображения, т.е. отображения локального проективного пространства $P_N(u+du)$ точки $A(u+du)$ базы пространства $P_{N,N}$ на исходное пространство P_N

$A_J(u+du) \to A_J(u) + \omega_J^{\mathcal{J}} A_{\mathcal{J}}$, где $\{A_J(u)\}$ -репер локального проективного пространства $P_N(u)$ (слоя) точки $A(u)$ базы пространства $P_{N,N}$ (предполагается, что $A_0 = A$).

Если предположить, что начало A_0 подвижного репера помещено на гиперповерхности, а вершины $A_1(u), \dots, A_{N-1}(u)$ расположены в ее касательной гиперплоскости, то в результате продолжения уравнения $\omega^N = 0$ возникает последовательность полей фундаментальных объектов $\Lambda_{ij}, \Lambda_{ijk}, \dots$, которая и лежит в основе дифференциальной геометрии гиперповерхности [1]. Для гиперповерхности в пространстве проективной связности нулевого кручения $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji} = a_{ij}$, $\Lambda_{ijk} = \Lambda_{jik}$.

2. С помощью относительного тензора второго порядка a_{ij} ($\mathrm{Det}\,|a_{ij}| \neq 0$) и геометрического объекта Λ_{ijk} мы построим величины третьего порядка $\overset{1}{b}_k = a^{ij}\Lambda_{ikj}$, $\overset{2}{b}_k = a^{ij}\Lambda_{ijk}$ и семейства величин

$$B_i(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha \overset{1}{b}_i + \beta \overset{2}{b}_i), \quad \widetilde{B}_i = \frac{1}{N-1}\left((N+1)\overset{1}{b}_i - 2B_i\right),$$

$$\Lambda_{ijk}(\lambda,\mu,\nu) = \frac{1}{\lambda+\mu+\nu}(\lambda\Lambda_{ijk} + \mu\Lambda_{jki} + \nu\Lambda_{kij}),$$

$$B_{ijk} = (N+1)\widetilde{\Lambda}_{ijk} - a_{ij}B_k - a_{jk}B_i - a_{ik}B_j; \quad B_{ij} = a^{pq}a^{rs}B_{ipr}B_{jqs},$$

$$\widetilde{B}_{ijk} = (N+1)\Lambda_{ijk} - a_{ij}B_k - a_{jk}\widetilde{B}_i - a_{ik}B_j; \quad \widetilde{B}_{ij} = a^{pq}a^{rs}\widetilde{B}_{ipr}\widetilde{B}_{jqs},$$

$$B_0 = a^{ij}B_{ij}, \quad \widetilde{B}_0 = a^{ij}\widetilde{B}_{ij},$$

где $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu$ -инвариантные параметры. Здесь и в дальнейшем, если это будет понятно по контексту, мы не будем указывать, от каких параметров зависит тот или иной геометрический объект. Нетрудно проверить, что семейства величин $B_{ijk}, \widetilde{B}_{ijk}, \widetilde{B}_{ij}, B_{ij}$ определяют относительные тензоры, а величины B_0 являются относительными инвариантами. Отметим, что в случае пространства проективной связности нулевого кручения соответствующие тензоры и инварианты, построенные Г.Ф.Лаптевым в работе [1], выделяются из приведенных выше формул при $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\lambda = \mu = \nu = 1$.

Придавая инвариантным параметрам другие значения, будем

получать разные геометрические объекты, удовлетворяющие, однако, следующему свойству: когда пространство становится проективным, все эти геометрические объекты совпадают с соответствующими объектами обычной гиперповерхности. Следовательно, происходит расщепление классических геометрических объектов гиперповерхности, построенных Г.Ф.Лаптевым, при переходе от проективного пространства к пространству проективной связности без кручения.

3. Построим геометрические объекты четвертого порядка:

а) Продолжение инвариантов B_0 приводит к семействам величин C_k $d\ln B_0 = \omega_N^N - \omega_0^0 + C_k\omega^k$. При помощи них строим следующие семейства линейных объектов:

$$H_k = \frac{1}{2}C_k + \frac{1}{2(N+1)}B_k, \quad \mathcal{J}^i = a^{ik}\left(\frac{1}{N+1}B_k - H_k\right).$$

Можно построить и другие квазитензоры: например, $\widetilde{\mathcal{J}}^i = a^{ik}\left(\frac{1}{N+1}\widetilde{B}_k - H_k\right)$.

б) Продолжение семейства величин B_i приводит к семейству L_{ij}

$$dB_i = B_k\omega_i^k + B_i\omega_0^0 + (N+1)(a_{ki}\omega_N^k - \omega_i^0) + L_{ij}\omega^j,$$

с помощью которого строятся семейства линейных объектов $(L, \overset{1}{b}_i, B_i)$, $(\hat{L}_{ij}, \widetilde{B}_{ijk})$, L^i:

$$L = \frac{1}{N-1}a^{ij}\left(L_{ij} - \frac{1}{N+1}B_iB_j\right), \quad \hat{L}_{ij} = L_{ij} - \frac{1}{N+1}B_iB_j - La_{ij}, \quad L^i = \widetilde{B}^{ij}a^{pr}a^{qs}B_{jpq}\hat{L}_{rs}.$$

Построим теперь семейства квазитензоров $X^i(\tau)$ и $\widetilde{X}^i(\tau)$, зависящих от инвариантного параметра τ,

$$X^i(\tau) = L^i - \tau(\mathcal{J}^i - L^i), \quad \widetilde{X}^i(\tau) = L^i - \tau(\widetilde{\mathcal{J}}^i - L^i).$$

4. Аналогично работе [1] приведем геометрическое истолкование построенных дифференциально-геометрических объектов, указав те геометрические образы, которые определяются ими в локальных пространствах: а) прежде всего, выделяются семейства относительно инвариантных форм $B_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k$ и $\widetilde{B}_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k$. Равенство их нулю выделяет в касательной гиперплоскости семейства конусов направлений Дарбу. Заметим, что семейство тензоров B_{ijk} не является симметричным по всем своим индексам. Однако из него можно выделить такое подсемейство (при $\lambda = \mu = \nu$), которое этому свойству удовлетворяет; б) отношения форм $B_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k / a_{ij}\omega^i\omega^j$ и $\widetilde{B}_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k / a_{ij}\omega^i\omega^j$ абсолютно инвариантны и являются обобщенными элементами Фубини;

в) в локальном пространстве $P_N(u)$, связанном с текущей точкой $A(u)$ гиперповерхности, определяются пучки инвариантных гиперквадрик Дарбу

$$a_{ij}x^i x^j + \frac{2}{N+1}B_i x^i x^N - 2x^0 x^N + \left(\frac{1}{N+1}L + \alpha B_0\right)x^N x^N = 0,$$

где $x^0, x^1, \ldots, x^N$ -координаты текущей точки относительно репера $A_0(u), A_1(u), \ldots, A_N(u)$; α -инвариантный параметр. При $\alpha=0$ из пучков выделяются квадрики Ли; г/к текущей точке $A(u)$ гиперповерхности присоединяются канонические пучки проективных нормалей. Эти пучки определяются точкой A и точкой $P = A_N - X^i A_i$. Отметим, что канонический пучок, построенный Г.Ф.Лаптевым в работе [1], не входит в это семейство ни при каких значениях инвариантных параметров. При $\tau=1$ из этих пучков выделяются нормали Фубини.

5. Приведем пример геометрического расщепления нормали Фубини и укажем соответствующие расщепленным нормалям геометрические объекты. С этой целью рассмотрим два эквивалентных определения нормали Фубини. Первое из них, принадлежащее Е.Бомпиани [6], процитируем.

Пусть задана поверхность σ и пусть Q -пучок квадрик Дарбу для этой поверхности. Построим квадратичный конус, содержащий асимптотическую касательную и четыре точки касания со своей огибающей. Варьируя квадриками Q в пучке, получим (для каждой асимптотической касательной) пучок конусов. Один из этих конусов (для каждой асимптотической касательной) вырождается в пару плоскостей, состоящую из касательной плоскости к поверхности и плоскости, пересекающейся с соответствующей плоскостью, построенной для другой асимптотической касательной по нормали Фубини.

Второе определение нормали Фубини принадлежит Н.И.Кованцову [3, с.110]. Нетрудно убедиться в том, что эти две конструкции, приводящие к нормали Фубини, допускают обобщение на поверхности в пространстве проективной связности нулевого кручения.

Если поверхность в трехмерном пространстве проективной связности нулевого кручения отнесена к реперу А.Швеца [5], то уравнение нормали Фубини, построенной с помощью конструкции Е.Бомпиани (ее назовем первой нормалью Фубини), будет иметь вид

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial v} - 2b_3^3\right)z, \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial u} - 2a_3^3\right)z,$$

где x, y, z -неоднородные проективные координаты, а уравнение нормали Фубини, построенной с помощью конструкции Н.И.Кованцова (назовем ее второй нормалью Фубини), будет иметь вид:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial v} + 2b_0^0 - b_1^1 - b_2^2\right)z, \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial u} + 2a_0^0 - a_1^1 - a_2^2\right)z.$$

Нетрудно убедиться в том, что первой нормали Фубини будет соответствовать квазитензор J_1^i (это соответствие будем понимать в том смысле, что в случае трехмерного пространства проективной связности квазитензор J_1^i определяет первую нормаль Фубини), полученный с помощью следующей цепочки аналитических построений:

$$b_k = \frac{2}{3}\overset{1}{b}_k + \frac{1}{3}\overset{2}{b}_k, \quad \tilde{\Lambda}_{ijk} = \frac{1}{3}\left(\Lambda_{ijk} + \Lambda_{jki} + \Lambda_{kij}\right),$$

$$b_{ijk} = (N+1)\tilde{\Lambda}_{ijk} - a_{ij}b_k - a_{jk}b_i - a_{ik}b_j; \quad b_{ij} = a^{pq}a^{rs}b_{ipr}b_{jqs},$$

$$b_0 = a^{ij}b_{ij}, \quad d\ln b_0 = \omega_N^N - \omega_0^0 + c_k\omega^k,$$

$$\overset{1}{h}_k = \frac{1}{2}c_k + \frac{1}{2(N+1)}\overset{2}{b}_k, \quad J_1^i = a^{ik}\left(\frac{1}{N+1}\overset{2}{b}_k - \overset{1}{h}_k\right).$$

Что касается второй нормали Фубини, то ее аналитическое построение до инварианта b_0 совпадает с построением, приведенным выше, для первой нормали Фубини. А далее строятся следующие объекты: $\bar{b}_k = 6\overset{1}{b}_k - 5\overset{2}{b}_k$, $\overset{2}{h}_k = \frac{1}{2}c_k - \frac{1}{2(N+1)}b_k$, $J_2^i = a^{ik}\left(\frac{1}{N+1}\bar{b}_k - \overset{2}{h}_k\right)$. Квазитензор J_2^i и определяет вторую нормаль Фубини.

Библиографический список

1. Лаптев Г.Ф. Гиперповерхность в пространстве проективной связности // Д АН СССР. М., 1958. Т. 121, №1, С. 41-44.

2. Синцов Д.М. Работы по неголономной геометрии. Киев: Вища школа, 1972. 293с.

3. Кованцов Н.И. Канонический пучок как образ проективной симметрии на поверхности // Укр. матем. ж. 1953. Т. 5. №1. С. 99-119.

4. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275-382.

5. Svec A. Sur la geometrie differentielle d'une surface plongee dans un espace a trois dimensions a connexion projective // Чехословацкий матем. ж. 1961. T. 11 (86). С. 386-397.

6. Bompiani E. Fasciodi quadriche di Darboux e normal proiettiva in un punto di una superficie // Atti Real Academia Nazionale dei Lincei. Rendiconti. clase di science fisiche, matematiche e naturale. 1927. V. 6. С. 187-190.